

## \* 研究简讯 \*

## 关于 Sierpinski 地毯的 Hausdorff 测度 \*

王兴华

温州大学数学与信息科学学院,温州 325027;浙江大学数学系,杭州 310028

**摘要** 得到具有 Hausdorff 维数  $s = \log 8 / \log 3$  的 Sierpinski 地毯  $F$  的 Hausdorff 测度的下列估值:

$$H^s(F) \leq \frac{55102^s}{864855992} = 1.089147 \dots$$

**关键词** Sierpinski 地毯 自相似 分形 Hausdorff 测度

Sierpinski 地毯与 van Koch 曲线,三分 Cantor 集和 Sierpinski 垫片一起,是 4 个众所周知的经典分形集(参见,例如文献[1]).但是除了已知三分 Cantor 集的 Hausdorff 测度为 1 之外<sup>[2]</sup>,其余 3 个分形的 Hausdorff 测度均属未知. Sierpinski 地毯预分形的联通性使它得到一个意想不到的实际应用.根据 Musser<sup>[3]</sup>报道, Motorola 公司所生产的手机电话已使用具有 Sierpinski 地毯形状的内藏天线,不但效率提高 25%,而且形状规整,不易折损.本文利用文献[2]中的一个经文献[4]诠释的定理,给出 Sierpinski 地毯  $F$  的 Hausdorff 测度的上方估值  $H^s(F) \leq 55102^s /$

$864855992 = 1.089147 \dots$ .如同文献[4]所给出的 Sierpinski 垫片 Hausdorff 测度的上方估值一样,在一个合理的猜测下,以这个估值为其一项的一个序列单降地趋向于 Hausdorff 测度的准确值.

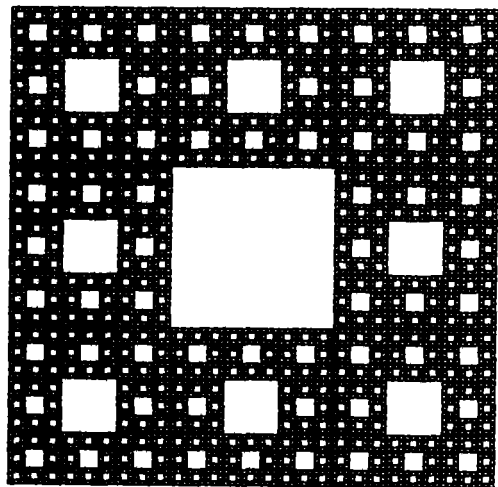


图 1 Sierpinski 地毯是一个联通分形

## 1 Sierpinski 地毯及其预分形

众所周知,只有如图 1 的联通分形集才叫做 Sierpinski 地毯, Mandelbrot<sup>[5]</sup>对分形集的命名都是模状自然物的.

单位闭正方形  $F_0$  是 Sierpinski 地毯  $F$  的初始预分形.把  $F_0$  剖分成 9 个边长为  $1/3$  的小闭正方形,不取位于正中的一个,而作其余 8 个小闭正方形之并,记作  $F_1$ ,是为  $F$  的 1 级预分形.对  $F_1$  的 8 个小闭正方形相似地重复上述过程,而最后作 64

2000-01-18 收稿,2000-04-21 收修改稿

\* 国家重点基础研究专项经费(批准号: G19990328)和浙江省自然科学基金(批准号: 197047)资助项目

个边长为  $1/9$  的小闭正方形之并, 记作  $F_2$ , 是为  $F$  的 2 级预分形. 一般地,  $F$  的  $n$  级预分形是  $8^n$  个边长  $1/3^n$  的小闭正方形之并, 如果以  $F_0$  的相邻两边为坐标轴, 那么这  $8^n$  个小闭正方形中的每个小闭正方形, 其离坐标原点最近顶点的坐标  $(x \cdot 3^{-n}, y \cdot 3^{-n})$  中的

$$x = x_1 \cdot 3^{n-1} + x_2 \cdot 3^{n-2} + \dots + x_n, \quad y = y_1 \cdot 3^{n-1} + y_2 \cdot 3^{n-2} + \dots + y_n,$$

$(x_i, y_i = 0, 1, 2)$  必满足下列逻辑条件

$$C(x, y) = \bigwedge_{i=1}^n ((x_i \neq 1 \vee (y_i \neq 1)), \tag{1}$$

这里  $\vee$  表示析取“或者”,  $\wedge$  表示合取“并且”.

## 2 覆盖系的选取

分形理论的经典文献[2]中的定理 9.3, 经文献[4]所作的诠释, 是求自相似集 Hausdorff 测度上方估值的基本工具. 现在应用这个定理(参见文献[4]定理 B)的关键, 在于含参数的覆盖系的选取. 参数的存在便于做最优化选择. 用 2 级预分形  $F_2$  的 64 个小闭正方形的每一个与  $F$  作交, 我们得到  $F$  的 64 个相似形, 暂称为小地毯. 其中, 如果有 4 个小地毯共有一个顶点, 我们把它们重新拼成一块四方联. 虽然有各种可能的不同选择, 但最终总能得到 8 块四方联, 见图 2.

对每一块小地毯的四方联, 以每个小地毯共有的顶点为中心, 以  $k \cdot 3^{-n-2}$  为半径作圆, 其中

$$k = k_1 \cdot 3^{n-1} + k_2 \cdot 3^{n-2} + \dots + k_n (k_i = 0, 1, 2).$$

记这些圆为  $U_i(n, k), i = 1, 2, \dots, 8$ . 设  $F_{n+2}$  的  $8^{n+2}$  个小闭正方形中, 完全被  $\bigcup_{i=1}^8 U_i(n, k)$  覆盖的小闭正方形共有  $32P_n(k)$  个, 那些没有被它覆盖或者不能完全被它覆盖的小闭正方形总共为  $J = 8^{n+2} - 32P_n(k)$  个. 对这  $J$  个小闭正方形的每一个, 都相似地重复上述过程, 我们得到  $8J$  个半径为  $k \cdot 3^{-(n+2)}$  的圆  $U_i(n, k), i = 9, 10, \dots, 8(1+J)$ . 循此下去, 最终得到  $F$  的一个几乎处处覆盖系  $\{U_i(n, k)\}_{i=1}^\infty$ , 其中  $U_{8(1+J+\dots+J^{j-1})+i}(n, k)$  是半径为  $k \cdot 3^{-(j+1)(n+2)}$  的圆,  $i = 1, 2, \dots, 8J^j, j = 0, 1, \dots$ . 由是

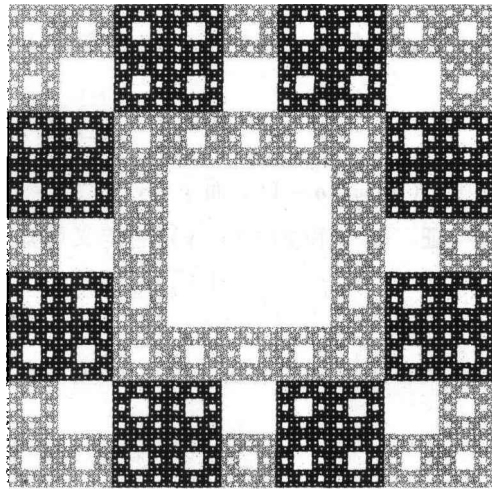


图 2 在  $F_2$  的 64 个小闭正方形的剖分下, 选取  $F$  的 8 块四方联

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^\infty |U_i(n, k)|^s &= \sum_{j=0}^\infty 8J^j (2k \cdot 3^{-(j+1)(n+2)})^s \\ &= \frac{8(2k \cdot 3^{-(n+2)})^s}{1 - J \cdot 3^{-(n+2)s}} = \frac{(2k)^s}{4P_n(k)}. \end{aligned}$$

从而由文献[4]的定理 B 得

**命题 1** 对任意正整数  $n$  和  $1 \leq k \leq 3^n$ , 有

$$H^s(F) \leq \frac{(2k)^s}{4P_n(k)},$$

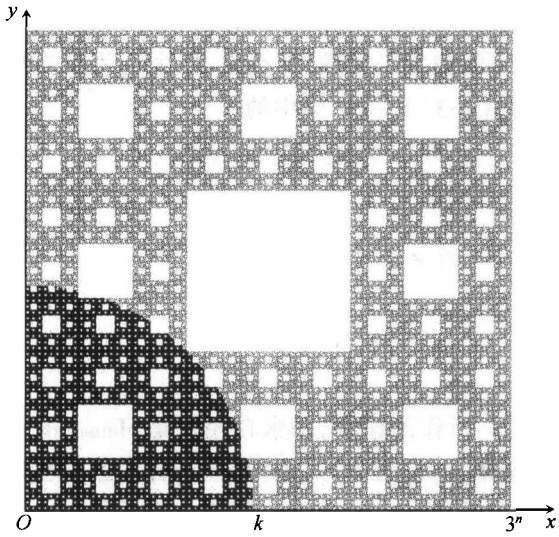


图 3 放大  $3^n$  倍的 Sierpinski 地毯与半径为  $k$  的圆

其中  $P_n(k)$  是放大了  $3^n$  倍的 Sierpinski 地毯被中心在地毯的一个顶点半径为  $k$  的圆所完全覆盖的  $n$  级预分形的小闭正方形个数(见图 3, 由于放大这些小闭正方形现在已是单位正方形), 即

$$P_n(k) = \sum_{x=0}^{k-1} \sum_{y=0}^{[\sqrt{k^2-(x+1)^2}] - 1} \chi(C(x, y)),$$

其中  $[\ ]$  表取整数部分,  $C(x, y)$  如(1)所定义, 而  $\chi(B) = 1$  (若  $B$  为真) 或  $0$  (否则).

### 3 $P_n(k)$ 的简化和对 $k$ 的最优化选取

**命题 2** 设  $t = t_1 \cdot 3^{n-1} + t_2 \cdot 3^{n-2} + \cdots + t_n$

和  $x = x_1 \cdot 3^{n-1} + x_2 \cdot 3^{n-2} + \cdots + x_n$ ,  $t_i, x_i = 0, 1, 2$ . 令

$$(t \mid x) = t_1 \cdot 3^{n-1} + t_2 \cdot 3^{n-2} + \cdots + t_i 3^{n-i},$$

其中  $i < n$ , 是使  $x_i = 1$  且  $t_i = 1$  的最小下标; 或者  $i = n$ , 如果这样的  $i$  不存在. 我们有

$$P_n(k) = \sum_{x=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i 2^{n-i-d(\bar{y}_i)(1-d(x_i))} \left( \frac{3}{2} \right)_{j=i+1}^{\sum d(x_j)},$$

其中  $d(a) = |a - 1|$ , 而  $\bar{y} = \bar{y}_1 \cdot 3^{n-1} + \bar{y}_2 \cdot 3^{n-2} + \cdots + \bar{y}_n = ([\sqrt{k^2 - (x+1)^2}] - 1 \mid x)$ .

**证** 从  $\bar{y}$  和  $\chi(C(x, y))$  的定义可知

$$\sum_{y=0}^{[\sqrt{k^2-(x+1)^2}] - 1} \chi(C(x, y)) = \sum_{y=0}^{\bar{y}} \chi(C(x, y)).$$

现在用数学归纳法证明, 对所有正整数  $n$  有等式

$$\sum_{y=0}^{\bar{y}} \chi(C(x, y)) = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i 2^{n-i-d(\bar{y}_i)(1-d(x_i))} \left( \frac{3}{2} \right)_{j=i+1}^{\sum d(x_j)}$$

成立. 事实上, 此等式对  $n = 1$  成立, 因为此时它即是

$$\sum_{y=0}^{\bar{y}_1} \chi(C(x_1, y)) = \bar{y}_1 2^{-d(\bar{y}_1)(1-d(x_1))},$$

而这是可以通过枚举验证的. 设需要证的等式对某个  $n$  已成立, 我们去证明它对  $n + 1$  也成立. 设此时处在  $x$  和  $\bar{y}$  位置上的相应变量分别为  $3x + x_{n+1}$  和  $3\bar{y} + \bar{y}_{n+1}$ . 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{y=0}^{3\bar{y} + \bar{y}_{n+1}} \chi(C(x, y)) &= \sum_{y=0}^{3\bar{y}} \chi(C(x, y)) + \sum_{y=3\bar{y} + 1}^{3\bar{y} + \bar{y}_{n+1}} \chi(C(x, y)) \\ &= 2 \left( \frac{3}{2} \right)^{d(x_{n+1})} \sum_{y=0}^{\bar{y}} \chi(C(x, y)) + \bar{y}_{n+1} 2^{-d(\bar{y}_{n+1})(1-d(x_{n+1}))}. \end{aligned}$$

把归纳法假设代入上式末端, 整理得

$$\sum_{y=0}^{3^{\bar{y}+j_{n+1}}} \chi(C(x, y)) = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{y}_i 2^{n+1-i-d(\bar{y}_i)(1-d(x_i))} \left(\frac{3}{2}\right)^{\sum_{j=i+1}^{n+1} d(x_j)},$$

这就是所需要证的.

利用命题 2 计算  $P_n(k)$ , 复杂性要小得多: 从  $O(k^2)$  降至  $O(k \log k)$ . 由是, 我们对  $k$  在  $3^{n-1} \leq k < 3^n$  范围内进行有限步优化搜索, 即对  $n = 1, 2, 3, \dots$ , 计算出使

$$\frac{(2k)^s}{4P_n(k)} = \min, \quad 3^{n-1} \leq k < 3^n$$

的  $k = k_n$  和  $P_n(k_n)$  的值. 我们有

**定理 1** 成立不等式

$$H^s(F) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2k_n)^s}{4P_n(k_n)},$$

其中的相关数值见表 1.

表 1 定理 1 的相关数据

$n$	$2k_n$	$4P_n(k_n)$	$\frac{(2k_n)^s}{4P_n(k_n)}$
1	4	4	3.477566...
2	10	56	1.395086...
3	26	392	1.216074...
4	78	3376	1.129623...
5	228	26372	1.101363...
6	682	211428	1.092934...
7	2042	1689068	1.090412...
8	6124	13515096	1.089532...
9	18368	108104848	1.089244...
10	55102	864855992	1.089147...

## 4 对准确值的猜测

如同讨论 Sierpinski 垫片的文献[4]一样, 我们需要一种理论, 来判断  $F$  的最优覆盖是否存在于或渐近地存在于覆盖系  $\{U_i(n, k)\}_{i=1}^{\infty}$  之中. 我们猜测其然. 基于这个猜测, 有

$$H^s(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2k_n)^s}{4P_n(k_n)}.$$

### 参 考 文 献

- 1 Falconer K J. Techniques in Fractal Geometry. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 1997
- 2 Falconer K J. Fractal Geometry-Mathematical Foundations and Applications. Chichester: John Wiley and Sons Ltd, 1990
- 3 Musser G. Wireless communications-practical fractals. Scientific American, 1999, 281(1): 23
- 4 王兴华. 关于 Sierpinski 垫片 Hausdorff 测度的估值和猜测. 自然科学进展, 1999, 9(6): 488
- 5 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature. New York: Freeman, 1982